Μάθημα 18ο 04/05/2018

Βασική έννοια για να καταλάβουμε τις ιδιότητες δυναμοσειρών, δηλ. της συνάρτησης την οποία ορίζουν στο πεδίο σύγκλισής τους

$$D := \{ z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \text{ συγκλίνει} \}$$

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad z \in D$$ είναι η

έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθιών και σειρών.

$$\underbrace{f_n \longrightarrow f}_{\text{η } f_n \text{ ακολουθία Cauchy}} \text{ ομοιόμορφα} :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0$$

$$\underbrace{\forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)|}_{= a_n} \leq \varepsilon$$

Άρα ισοδύναμα: $f_n \to f$ ομοιόμορφα $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0$

$$\underbrace{\sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)|}_{=: \underbrace{\|f_n - f\|}_{=: a_n}} \leq \varepsilon$$

$\Longleftrightarrow a_n \longrightarrow 0$

$\Longleftrightarrow \|f_n - f\| \longrightarrow 0$

Όταν $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\Leftrightarrow$ η (f_n) είναι

ακολουθία Cauchy $:\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \ \forall n,m \geq n_0$

$$\underbrace{\|f_n - f_m\|}_{=: d(f_n, f_m)} < \varepsilon$$

Αποδ.

(f_n) συγκλίνει $\Rightarrow$ (f_n) είναι Cauchy : Έστω $\varepsilon>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 \ \forall n,m \geq n_0 : \ \|f_n - f\|, \|f_m - f\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \varepsilon$

$$\forall z \in D : |f_n(z) - f_m(z)| \leq \underbrace{|f_n(z) - f(z)|}_{\leq \|f_n - f\|} + \underbrace{|f(z) - f_m(z)|}_{\leq \|f_m - f\|}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)|}_{= \|f_n - f_m\|} \leq \text{———} // \text{———}$$

(f_n) Cauchy $\Rightarrow \exists f : D \to \mathbb{C} : f_n \to f$ ομοιομ.

Έστω $\varepsilon>0$. Έχουμε :

$\exists n_0 \ \forall n,m \geq n_0$

$$\underbrace{\|f_n - f_m\|}_{= \sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)|} < \varepsilon$$

Έστω $z \in D$, τότε έχαμε $\exists n_0 \ \forall n,m \geq n_0$:

$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ (και αυτό ισχύει $\forall \varepsilon > 0$)

$\Longrightarrow (f_n(z))$ Cauchy $\underset{\mathbb{C}\text{ πλήρες}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) =: f(z)$

[Φτιάξαμε μια $f: D \to \mathbb{C}$ στην οποία η f_n συγκλίνει κατά σημείο]

Όπως είδαμε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n,m \geq n_0 : \forall z \in D$:

$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$

$$\underset{m \to \infty}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \underbrace{\forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon}_{\Longleftrightarrow \|f_m - f\| \leq \varepsilon}$$

δηλ. $f_n \to f$ ομοιόμορφα □.

Κριτήριο Weierstrass

$$\|f_n\| := \sup_{z \in D} |f_n(z)| \leq M_n \in [0, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty \Longrightarrow \underbrace{\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα}}_{\Longleftrightarrow \left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα}}$

Απόδειξη

Αφού $\sum M_n < +\infty$ η ακολουθία (S_n) μερικών αθροισμάτων συγκλίνει $\underset{\mathbb{C}\text{ πλήρες}}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow$ η ακολ. (S_n) είναι Cauchy $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0$

$\forall n \geq n_0\ \forall \ell \in \mathbb{N} : |S_{n+\ell} - S_n| < \varepsilon$

όπου $\left|S_{n+\ell} - S_n\right| = \left|\sum_{k=1}^{n+\ell} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+\ell} M_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+\ell} M_k$

και έχουμε $\forall z\in D$ $\left|\sum_{k=n+1}^{n+\ell} f_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+\ell} \underbrace{|f_n(z)|}_{\leq \|f_n\| \leq M_n}$ $\leq \varepsilon$

$\underset{\forall z\in D}{\Longrightarrow} \left|\sum_{k=1}^{n+\ell} f_k(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \left\| \sum_{k=1}^{n+\ell} f_k - \sum_{k=1}^{n} f_k \right\| \leq \varepsilon$

δηλ. η ακολουθία μερικών αθροισμάτων $\left(\sum_{1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$

είναι Cauchy

$\underset{\text{στοιχειώδες}}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

f_n συνεχείς , $f_n \longrightarrow f$ ομοιόμορφα $\Rightarrow f$ συνεχής

Απόδ.

Λήμμα : Έστω $D \subset \mathbb{C}$ και $a \in \mathbb{C}$ σημ. συσσ. του D

και έστω $f_n, f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ με $f_n \longrightarrow f$ ομοιομ. και $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{z \to a} f_n(z) = A_n \in \mathbb{C}}$

$\Rightarrow$ η $(A_n) \subset \mathbb{C}$ συγκλίνει και $\lim_{z \to a} f(z) = \lim_{n \to \infty} A_n$

Αποδ.

Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε $\exists n_0 \; \forall n, m \geq n_0 : \forall z \in D \; |f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ —— // —— $|A_n - A_m| \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow (A_n)$ Cauchy $\Rightarrow \exists A = \lim_{n \to \infty} A_n$

Αφού $A_n \longrightarrow A$

$f_n \longrightarrow f$ ομοιομ. τότε $\exists n \in \mathbb{N}$:

: $|A_n - A| < \varepsilon/3$, $\forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon/3$ (1)

και γι' αυτό το σταθερό $n \in \mathbb{N}$ $\exists \delta > 0 : \forall z \in D, \; 0 < |z - a| < \delta$

: $|f_n(z) - A_n| < \varepsilon/3$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \forall z \in D,\ 0<|z-a|<\delta$

$$|f(z)-A| \le |f(z)-f_n(z)| + |f_n(z)-A_n| + |A_n-A| < \varepsilon$$

$\square$

Εφαρμογή για την απόδειξη του 6.6

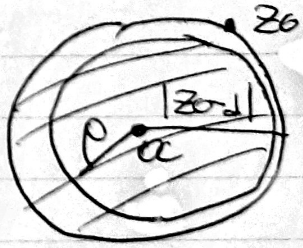
f_n συνεχής στο $\forall a \in D$

$\Rightarrow \lim_{z\to a} f_n(z) = f_n(a) = A_n$

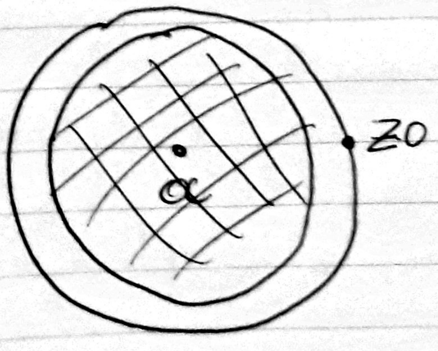
$\Rightarrow$ Λήμμα $\Rightarrow \underline{\underline{\lim_{z\to a} f(z)}} = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = \underline{\underline{f(a)}}$

<u>Πρόταση</u>

Έστω η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει στο $z_0 \in \mathbb{C}\setminus\{a\}$



$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει απόλυτα σε όλον τον ανοιχτό δίσκο (!) $D(a, |z_0-a|)$
και μάλιστα ομοιόμορφα σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα $K \subset D(a, |z_0-a|)$
ειδικότερα στους κλειστούς δίσκους $\overline{D}(a,\rho)$ με $\rho<|z_0-a|$



ΠΡΟΣΟΧΗ !!!

<u>Απόδειξη</u> $\sum c_n(z-\alpha)^n$ συγκλίνει στο $z_0 \neq \alpha$

$\Longrightarrow (c_n(z_0-\alpha)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μηδ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow |c_n||z_0-\alpha|^n \longrightarrow 0$

$\Longrightarrow |c_n||z_0-\alpha|^n$ φραγμένη

$\Longleftrightarrow \exists\, c>0 : |c_n||z_0-\alpha|^n \leq c \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Αφού $\forall\, z\in D(\alpha, |z_0-\alpha|) \Longleftrightarrow |z-\alpha|<|z_0-\alpha|$

έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-\alpha|^n}{|z_0-\alpha|^n} < +\infty$ και:

$$|c_n||z-\alpha|^n = \underbrace{|c_n||z_0-\alpha|^n}_{\leq c} \frac{|z-\alpha|^n}{|z_0-\alpha|^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

<u>Προκύπτει:</u>

$$\boxed{\sum |c_n||z-\alpha|^n} \leq c \sum \frac{|z-\alpha|^n}{|z_0-\alpha|^n} < +\infty$$

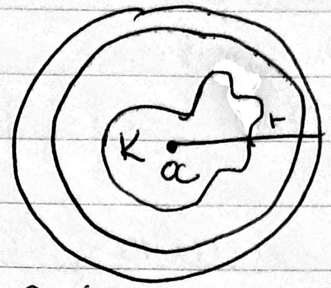
η $\sum c_n(z-\alpha)^n$ συγκλίνει απόλυτα

$\forall\, z\in D(\alpha, |z_0-\alpha|)$

Για το δεύτερο συμπέρασμα :

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: $K \subset D(a,r)$, $r>0$ και K συμπαγές

τότε $\exists\, \rho \in (0,r) : K \subset \overline{D}(a,\rho)$



Αν ισχύει (πια ισχύει) αυτό το λήμμα, τότε έστω $K \subset D(a, \underbrace{|z_0-a|}_{=r})$ συμπαγές και έστω $\rho \in (0, |z_0-a|)$,

όπως το δίνει το λήμμα, δηλ. με $\underbrace{K \subset \overline{D}(a,\rho)}_{\iff |z-a| \le \rho \ \forall z \in K}$

Τότε $\forall z \in K : |c_n||z-a|^n \le |c_n|\rho^n =$

$$\left[= |c_n| r^n \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \right] = \underbrace{|c_n||z_0-a|^n}_{\le c} \left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right)^n$$

με $c \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right)^n < +\infty$

Άρα έχουμε: $\underbrace{\|f_n\|}_{= \sup_{z \in K} |f_n(z)|} \le c \left(\frac{\rho}{|z_0-a|}\right)^n$ και από το

κριτήριο Weierstrass έχουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} f_n =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

Πρόταση / ορισμός

Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Τότε ο αριθμός:

$$R := \sup\{r \geq 0 : (|c_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ φραγμένη}\} \in [0,+\infty)$$

είναι <u>η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς</u>

δηλ. (i) αν $R \in (0,+\infty)$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $z \in D(a,R)$ και αποκλίνει για $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,R)$

(ii) αν $R=0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $z=a$

(iii) αν $R=+\infty$ η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα $\forall z \in \mathbb{C}$

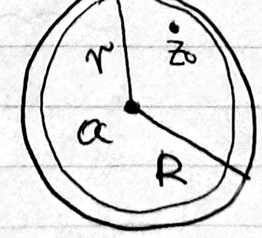
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $R \in (0,+\infty]$ και $z \in \mathbb{C}$ με $\underbrace{|z-a|<R}_{\Leftrightarrow z \in D(a,R)}$

τότε $\exists\, r \in (0,R)$ με $|z-a|<r$

και για $c>0$ με

$|c_n| r^n \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$



έχουμε από το κριτήριο Σύγκρισης.

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \underbrace{|z-a|^n}_{=r^n \frac{|z-a|^n}{r^n}} \leq c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z-a|^n}{r^n} < +\infty$$

δηλ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ συγκλίνει Απόλυτα.

Ενώ αν $R \in [0, +\infty)$ και $z \in \mathbb{C}$ με $|z-a| > R$ τότε η $(|c_n||z-a|^n)$ δεν είναι φραγμένη

$\Longrightarrow (c_n |z-a|^n)$ δεν είναι μηδενική

$\Longrightarrow \sum c_n (z-a)^n$ αποκλίνει.

<u>Πρόταση</u>

Αν για την $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ έχουμε $c_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$

και $\exists$ $R := \lim_{n \to \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \in [0, +\infty]$

Τότε αυτό είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς

<u>Αποδ</u>

<u>Κριτήριο Λόγου</u>: Για $z \neq a$

$$|z-a| < R \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{|c_{n+1}||z-a|^{n+1}}{|c_n||z-a|^n} = \frac{|z-a|}{R} < 1$$

$$\left[\begin{array}{lll} \text{για} & < & > \sum c_n (z-a)^n \text{ συγκλ} \\ & > & \sum c_n (z-a)^n \text{ αποκλ} \end{array}\right] \quad >$$

$\left(\frac{1}{+\infty} = 0 \quad \frac{1}{0} = +\infty \right)$

Αποδ.

$$|z-a| \lneqq R \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}\,|z-a|^n = |z-a| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \lneqq 1$$

και το αποδεικτέο προκύπτει από το Κριτήριο ρίζας.

Άσκηση. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των $\sum c_n (z-a)^n$ με $c_n = n^k$ $k \in \mathbb{Z}$, 2^n, $\frac{n!}{n^n}$, $\frac{n^n}{n!}$

και n^A, $A^n \frac{n!}{n^n}$; $(A>0)$

Πρόταση | Η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_0^{\infty} c_n (z-a)^n$

είναι η $R := \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$

$\left(\text{με } \frac{1}{+\infty} = 0,\ \frac{1}{0} = +\infty \right)$